

Tentamen i Mekanik 1 (FFM515/FFM516)

Tid och plats: Onsdagen den 17 augusti 2016 med start 08.30 i "Maskin"-salar.

Hjälpmedel: Inga

Examinator: Ulf Gran

Jour: Stellan Östlund, tel. 076-761 90 06, besöker tentamenssalarna c:a kl. 10.00 och 12.00.

OBS: Tentamen är indelad i **två delar**, del 1 och 2. Du kan välja **ett** av följande alternativ:

- Tentera hela kursen genom att lösa båda delarna av tentan under 5 timmar (sista inlämning 13.30). För att bli godkänd (på tentan och hela kursen) krävs för studenter registrerade på den nya kursen FFM516 minst 6 poäng totalt varav minst 3 poäng på varje del. För studenter registrerade på den gamla kursen FFM515 krävs endast minst 6 poäng totalt, dvs det finns inget krav på minst 3 poäng på varje del av tentan.
- Tentera en del av kursen genom att lösa en av delarna av tentan under 3 timmar (dvs med sista inlämning 11.30). För att bli godkänd på den del studenten valt att tentera krävs minst 3 poäng. Kan vara lämpligt val om man sedan tidigare är godkänd på en del av kursen.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska uttryckas i de storheter som är givna i uppgiftstexten och i tillhörande figur (samt tyngdaccelerationen g om denna behövs) och, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på varje del av tentan, och maximalt 18 poäng på hela tentan. För att bli godkänd på en del av tentan krävs minst tre poäng och 3-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5. För kraven att bli godkänd på båda delarna av tentan se rutan ovan. Förutsatt att man uppfyller kraven för godkänt är betygsgränserna 6-10 för betyg 3, 11-14 för betyg 4 samt 15-18 för betyg 5.

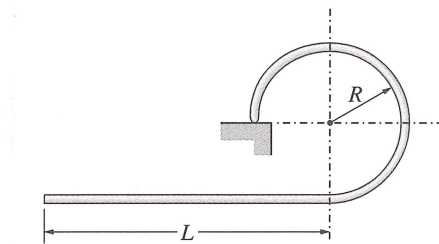
Rättningsgranskning: Datum och plats meddelas via kurshemsidan för senaste kurstillfället, dvs 2015/16, i PingPong.

Lycka till!

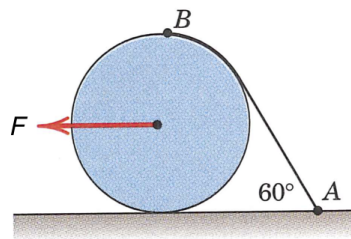
Del 1

1. Bestäm förhållandet L/R så att den homogena ståltråden böjd enligt figuren kan vara i jämvikt i det avbildade läget.

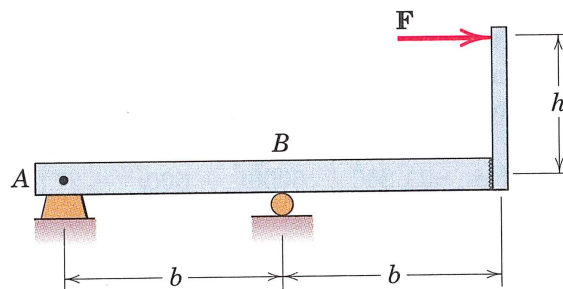
Ledning: Beräkna tyngdkraftfördelningens vridmoment med avseende på den punkt där ståltråden vidrör bordet.



2. Cyklindern har massan m och hålls på plats med lina som är fäst i punkterna A och B . Den statiska friktionskoefficienten mellan cylindern och underlaget är μ_s . Hur stor måste kraften F vara för att cylindern ska börja glida?

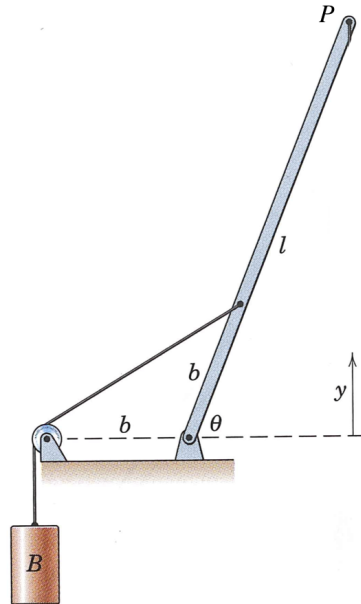


3. Rita grafer över skjuvspänningen V och böjmomentet M i den horisontella balken som funktioner av avståndet x från punkten A för en given belastning F . (Balkens tyngd försummas.)

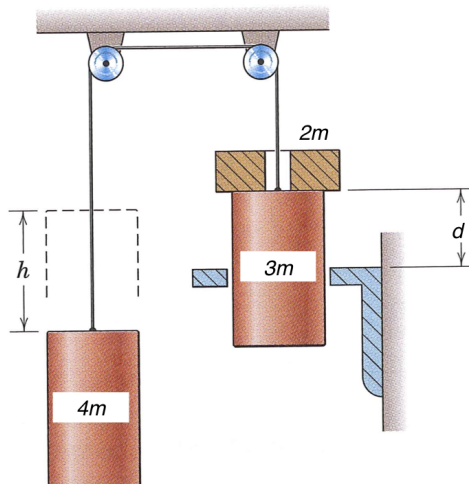


Del 2

- 4 Kropp B rör sig neråt med hastigheten v_B . Bestäm hastigheten (horisontal och vertikalkomponent) för punkten P uttryckt i b, l, θ och v_B .

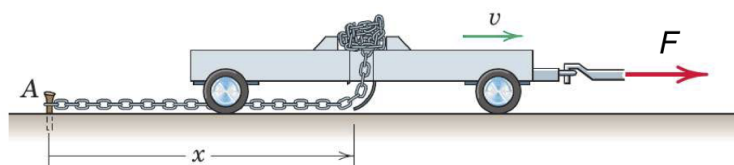


- 5 Systemet släpps från vila i det avbildade läget med avståndet d givet. Cyindern med massan $3m$ kan fritt passera genom öppningen, men ringen med massan $2m$ som ligger ovanpå cylindern är så stor att den blir liggande ovanpå öppningen. Bestäm höjden h som cylindern med massan $4m$ stiger innan den vänder.



- 6 En vagn dras av en konstant kraft F . På vagnen ligger en kedja med massan ρ per längdenhet som passerar genom ett hål i vagnen och är fäst i marken. Vagnen och kedjan börjar med en fart v_0 i punkten $x = 0$ och har då totala massan m_0 . Beräkna accelerationen för vagnen uttryckt i F , m_0 , ρ och x . Beräkna också spänningen T i kedjan på marken i termer av v och ρ , där v är vagnens hastighet vid position x . All friktion kan försummas.

Ledning: Antag att varje länk i kedjan rycks ner från vagnsflaket med en infinitesimal kraft och därefter initialt hamnar i fritt fall genom hålet.

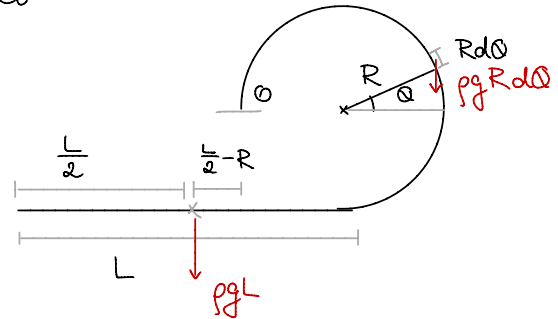


1. Låt ρ beteckna massa/längdenhet

$$M_O^{\text{rak}} = \left(\frac{L}{2} - R\right) \rho g L$$

$$M_O^{\text{böjd}} = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} R(1 + \cos\theta) \rho g R d\theta$$

$$= - \rho g R^2 \left(\frac{3\pi}{2} + 1\right)$$



Momentjämvikt:

$$0 = M_O^{\text{rak}} + M_O^{\text{böjd}} = \rho g \left(\frac{L^2}{2} - RL - R^2 \left(\frac{3\pi}{2} + 1 \right) \right) = \frac{R^2}{2} \rho g \left(\frac{L^2}{R^2} - 2\frac{L}{R} - 3\pi - 2 \right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{L}{R} = 1 + \sqrt{3\pi + 3}}} \quad \text{ty} \quad 1 - \sqrt{3\pi + 3} < 0$$

(dim. löst, OK!)

2. Fritägg cylindern och den del av
störet som ligger an mot cylindern
när glidning börjar.

Jämvikt ger:

$$\rightarrow : S \cos \theta + \mu_s N - P = 0$$

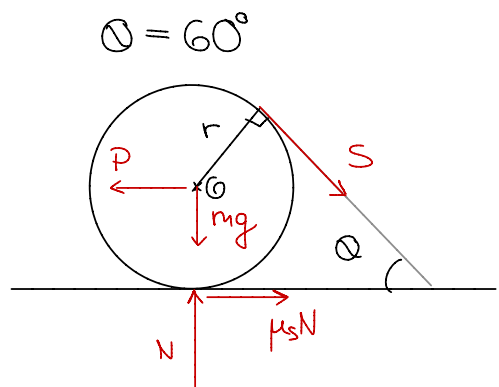
$$\uparrow : -S \sin \theta + N - mg = 0$$

$$\odot : r\mu_s N - rS = 0$$

Eliminera S och N för att få

$$P = \frac{3\mu_s mg}{2 - \sqrt{3}\mu_s}$$

$$[P] = [mg] = N \quad \text{dim OK!}$$



3 Frilägg balken

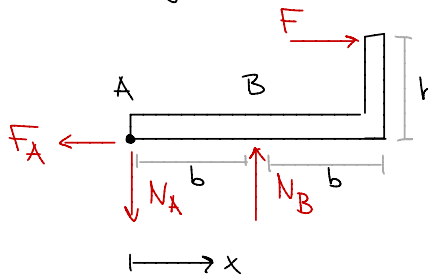
(tyngd försummas)

Från följande jämviktsekv.

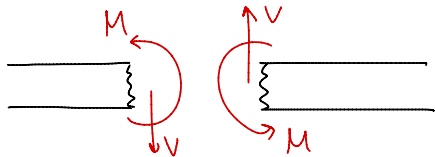
$$\uparrow : N_B - N_A = 0$$

$$\curvearrowleft_A : bN_B - hF = 0$$

$$\text{fås att : } N_A = N_B = \frac{h}{b} F$$

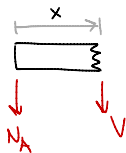


Teckenkonvention för styvspänning $V(x)$ och böjmoment $M(x)$



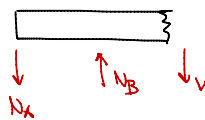
För $0 \leq x < b$:

$$V(x) = -N_A = -\frac{h}{b} F$$



För $b < x \leq 2b$:

$$V(x) = N_B - N_A = 0$$

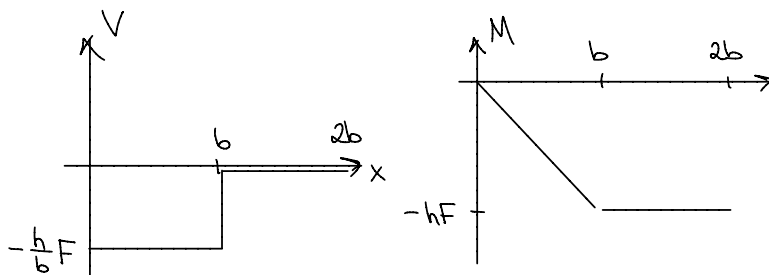


Böjmomentet fås genom standarduttrycket

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \text{med randvillkor} \quad M(0) = 0$$

(ty inget vridmoment från fästet i A)

Vi får att



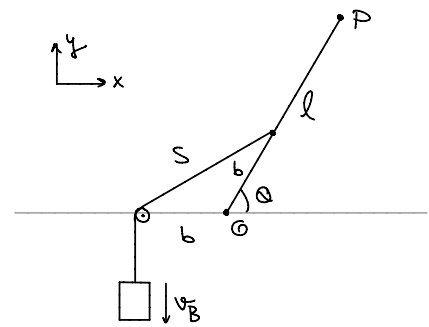
(dim. OK)

4. $x_p = l \cos \theta$ $y_p = l \sin \theta$

Cosinussatsen ger:

$$s^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cos(\pi - \theta)$$

$$= 2b^2(1 + \cos \theta) \quad (*)$$



där s är längden på snöret från stängen till trissan. Eftersom tyngden rör sig med farten v_B nedåt så får vi $\dot{s} = -v_B$

Deriverar vi (*) fås

$$2s\dot{s} = -2b^2 \sin \theta \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = + \frac{s v_B}{b^2 \sin \theta} = \frac{v_B}{b \sin \theta} \sqrt{2(1 + \cos \theta)}$$

Vi får då

$$v_x = \dot{x}_p = -l \sin \theta \dot{\theta} = - \frac{l v_B}{b} \sqrt{2(1 + \cos \theta)}$$

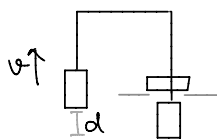
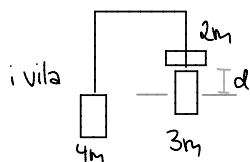
$$v_y = \dot{y}_p = l \cos \theta \dot{\theta} = \frac{l v_B}{b \tan \theta} \sqrt{2(1 + \cos \theta)}$$

$$[v_x] = [v_y] = \left[\frac{l v_B}{b} \right] = [v_B] \quad \text{OK!}$$

5. Låt v vara systemets fart när ringen når öppningen.

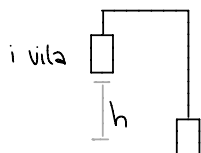
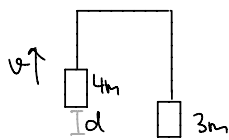
Använd energiprincipen på förloppen:

- Förlopp 1: (innan stöt, med ring)



$$\frac{\Delta E}{W} \quad \frac{1}{2}(3m+4m+2m)v^2 = (3mg+2mg-4mg)d$$

- Förlopp 2: (efter stöt, utan ring)



$$-\frac{1}{2}(3m+4m)v^2 = (3mg-4mg)(h-d)$$

Farten v är densamma i de två bilderna (dvs precis före och efter stöt) då ringen inte överför någon rörelsemängd till cylindern.

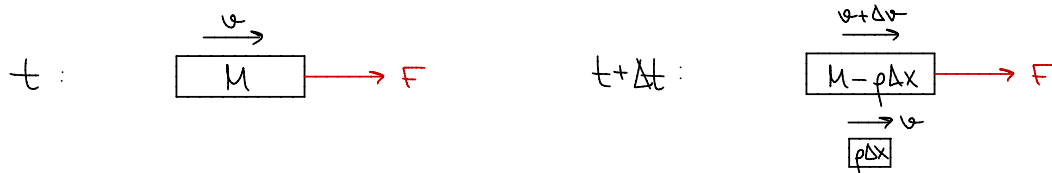
Eliminera v för att få:

$$\underline{\underline{h = \frac{16}{9}d}} \quad (\text{dim OK})$$

6. Massan för vagnen med påliggande kedja är $M = m_0 - \rho x$.

- Låt oss först betrakta vagnen med påliggande kedja vid tiden t och positionen x , under förloppet Δt då en liten bit Δx av kedjan, med massa $\rho \Delta x$, åker av vagnen och faller fritt (dvs innan den bromsas av kedjan på marken). Vi fokuserar på horisontella rörelser.

Enligt uppgiften kan vi försumma kräfter som rycker ner kedjebiten Δx .



Impulslagen ger (när vi tar infinitesimaler och försummar $\Delta x \Delta v$)

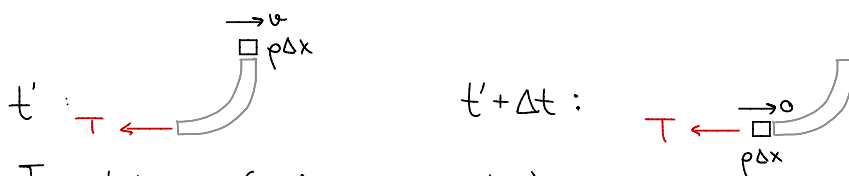
$$P(t) = Mv \quad P(t + \Delta t) = (M - \rho \Delta x)(v + \Delta v) + \rho \Delta x v = M(v + \Delta v)$$

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{M \Delta v}{\Delta t} = Ma$$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{M} = \frac{F}{m_0 - \rho x}$$

$$[a] = \frac{\text{kg m/s}^2}{\text{kg}} = \text{m/s}^2 \quad \text{OK!}$$

- För att få spännkraften T , låt oss istället betrakta förloppet då kedjebitarna bromsas in. Som förut försummar vi kräfter som rycker ner nästa kedjebit från vagnen. Åter betraktas endast horisontell rörelse.



Impulslagen (med infinitesimaler):

$$T = -\frac{\Delta P'}{\Delta t} = -\frac{\rho \Delta x \cdot 0 - \rho \Delta x v}{\Delta t} = \underline{\underline{\rho v^2}}$$

$$[T] = \frac{\text{kg}}{\text{m}} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \quad \text{OK!}$$